几种构造处处不可导的连续函数的方法

钟远涛，袁　力，邓　钦
（郧阳师范高等专科学校　数学系，湖北　丹江口　442700）

［摘　要］无处可微的连续函数的发现使数学领域发生了划时代的变化，引发了实变函数论等重要数学分支的产生.对构造方法的掌握有利于相关知识的研究.

［关键词］连续不可导函数；构造方法；维尔斯特拉斯函数
［中图分类号］O174.4　　［文献标识码］A　　［文章编号］1008—6072(2003)06—0010—02

无处可微的连续函数的发现一度被认为是奇怪而无意义的函数，数学家波尔察诺、柯西、维尔斯特拉斯、布什等人的研究使人们逐渐接受并认可了这类函数，并由此使数学领域发生了划时代的变化，引发了实变函数论等重要数学分支的产生.另外，概率论的一个应用性很强的分支——随机过程论就是研究无处可微的函数，因为布朗运动过程几乎所有的样本轨道都是无处可微连续函数，对数学名家构造方法的了解有利于我们对相关学科的学习和科研.

1　小数方法构造

迄今为止最为简单和初等的无处可微连续函数的例子是 1952 年美国数学家布什提出的.布什的优美例子是利用实数的小数展式来定义的：

设 b 为大于 1 的整数，x 是$[0,1]$中的实数，其 b 进位小数表示为

$$x = 0.x_1x_2\cdots x_k\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{b^k};$$

$$x_k = 0,1,\cdots,b-1 \tag{1}$$

利用二进小数定义函数 $u = f(x)$ 如下：

$$u = 0.u_1u_2\cdots u_k\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{2^k};$$

$$u_k = 0,1 \tag{2}$$

其中

$$u_1 = 1 \tag{3}$$

当 $k \geqslant 1$ 时

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_k, & \text{如果 } x_{k+1} = x_k \\ 1-u_k, & \text{如果 } x_{k+1} \neq x_k \end{cases} \tag{4}$$

易知，尽管某些 x 有两种 b 进小数表示法，但按(2)～(4)定义的函数 $f(x)$ 是唯一确定的，事实上，设

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{b^k}(x_n > 0, x_{n+k} = 0) \tag{5}$$

$$x = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{b^k} + \frac{x_n - 1}{b_n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b-1}{b^k} \tag{6}$$

是 x 的两种 b 进小数表示，由于(3)中 u_k 之值仅依赖于(1)式的前 k 位小数，故当 x 分别由(5)与(6)表示时，$f(x)$ 之值分别为

$$u = \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1-u_n}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}$$

$$u' = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{2^k} + \frac{u'_n}{2^n} + \sum_{n=n+1}^{\infty}\frac{1-u'_n}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}$$

下面我们来证明：

(1) $f(x)$ 是连续函数.

设 $x \in [0,1]$，且 x 与 $f(x)$ 分别由(1)与(2)表示.我们约定，如果 x 有两种 b 进位小数表示法，则(1)取从某位起 x_k 恒为 0 的形式.

任给 $\varepsilon > 0$，取正整数 n 充分大，使得 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$，

令 $x^* = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{b^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b-1}{b^k}$

则当 $x < x' < x^*$ 时其 b 进小数表示为

［收稿日期］2003—09—20
［作者简介］钟远涛(1978—)，男，湖北丹江口人，郧阳师范高等专科学校数学系助教，主要从事计算机辅助教学、计算机基础及高等数学教学研究.

万方数据

$$x' = 0.x_1\cdots x_n x'_{n+1} x'_{n+2}\cdots \tag{7}$$

令 $f(x') = 0.u'_1 u'_2\cdots u'_k\cdots$(二进制小数)

因为 u'_k 仅依赖于(7) 的前 k 位小数,故有

$u'_k = u_k, l \leqslant k \leqslant n$

于是

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

故 f 在 x 处右连续.

同理可证 f 在 x 处左连续,故 f 连续.

(2) 当 $b > 2$ 时 $f(x)$ 处处不可微.

设 x 与 $f(x)$ 分别由(1) 与(2) 表示.取 $x^{(n)} \in [0,1]$,设其 b 进位小数表示为

$$x^{(n)} = 0.x_1\cdots x_n x'_{n+1} x'_{n+2}\cdots \tag{8}$$

其中如果 $u_{n+1} = u_n$,则取 $x'_{n+1} \neq x_n$;如果 $u_{n+1} = 1 - u_n$,则取 $x'_{n+1} = x_n$;如果 $u_{n+2} = u_{n+1}$,则取 $x'_{n+2} \neq x'_{n+1}$;如果 $u_{n+2} = 1 - u_{n+1}$,则取 $x'_{n+2} = x'_{n+1}$.

当 $k > n + 2$ 时,x'_k 任意.设 $f(x^{(n)}) = 0.u'_1 u'_2\cdots u'_k\cdots$(二进位)

则由定义有 $u'_k = u_k, 1 \leqslant k \leqslant n, u'_{n+1} = 1 - u_{n+1}, u'_{n+2} = u_{n+2}$

由此有

$$|f(x^{(n)}) - f(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u'_k - u_k}{2^k}\right| \geqslant \frac{1}{2^{n+2}} \tag{9}$$

而由(1) 与(8) 有

$$|x^{(n)} - k| \leqslant \frac{1}{b^n} \tag{10}$$

由(9) 与(10) 得

$$\left|\frac{f(x^{(n)}) - f(x)}{x^n - x}\right| \geqslant \frac{b^n}{2^{n+2}}$$

由此当 $b > 2$ 时有

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x^{(n)}) - f(x)}{x^n - x}\right| = +\infty$$

故 f 不存在有限的导数.

2 级数方法构造

定理 设 $0 < a < 1$,b 是奇数,令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$

$$\text{如果 } ab > 1 + \frac{\pi}{2}(1 - a) \tag{11}$$

则 $f(x)$ 处处不存在有限的单侧导数;

$$\text{如果 } ab > 1 + \frac{3\pi}{2}(1 - a) \tag{12}$$

则 $f(x)$ 也处处不存在无穷导数(双侧).

通过以上两种方法可以实现构造无处可微的连续函数,比如下面列举的几个例子就是单侧无处可微连续函数.

例 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}\sin(b^n x), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}\sin(b^n x)$,其中 $a > 1$ 为实数,b 为大于 2 的整数.

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin(b^n x), \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n \sin(b^n x)$,其中 $0 < a < 1$,b 为正整数,且 $ab > \frac{\pi}{2} + 1$.

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}\cos(b^n x), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}\cos(b^n x)$,其中 $a > 1$ 为实数,b 为大于 1 的整数.

【编校:沈 贤】

The Methods of Constructing Nowhere Differentiable Continuous Function

ZHONG Yuan-tao, YUANG Li, DENG Xin

(Mathematics Department, Yunyang Teacher's College, Danjiangkou 4472700, China)

Abstract: The things that nowhere differentiable continuous functions were found. And the epoch-making change has taken place in mathematics. Some important branchs such as the theory functions of real variable etc, have occured. Knowing the method of construction contributes to scientific research and study.

Key words: nowhere differentiable continuous functions; methods of construction; function of Weierstrass

万方数据

万方数据 WANFANG DATA 文献链接

几种构造处处不可导的连续函数的方法

作者： 钟远涛， 袁力， 邓歆
作者单位： 郧阳师范高等专科学校,数学系,湖北,丹江口,442700
刊名： 郧阳师范高等专科学校学报
英文刊名： JOURNAL OF YUNYANG TEACHERS COLLEGE
年，卷(期)： 2003,23(6)

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_yysfgdzkxxxb200306003.aspx